Matemática Discreta I
Tema 4 - Ejercicios resueltos

Principios básicos

Ejercicio 1. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6, cuyas cifras sean todas distintas?

Solución. Si $n < 10^6$, n tiene 6 o menos cifras.
Consideramos por separados los números de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cifras.

- De 1 cifra hay 9 números.

- De 2 cifras hay $9 \cdot 9$ (son de la forma ab con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $a \neq b$).

- De 3 cifras hay $9 \cdot 9 \cdot 8$ (son de la forma abc con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, a, b, c distintos).

- Análogamente, de 4 cifras hay $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, de 5 cifras hay $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ y de 6 cifras hay $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Así, la solución es $9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 168.570$.

Ejercicio 2. Las placas de matrícula de los vehículos de un cierto país constan de 4 letras seguidas de 3 números. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse?

Solución. Son de la forma $L_1L_2L_3L_4N_1N_2N_3$ con $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \{a, b, c, \ldots, \tilde{n}, \ldots, x, y, z\}$, $N_1, N_2, N_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$).
Así, la solución es $27^4 \cdot 10^3$.

Ejercicio 3. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 que no sean capicúas?

Solución. Vamos a calcular los que son capicúas.
Si $n < 10^6$, n tiene 6 o menos cifras. Consideramos por separados los números de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cifras.

- Los 9 números de una cifra son capicúas.

- De 2 cifras hay 9 números capicúas (de la forma aa con $1 \leq a \leq 9$).

- De 3 cifras hay $9 \cdot 10$ números capicúas (son de la forma aba con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$).

- De 4 cifras hay $9 \cdot 10$ números capicúas (son de la forma $abba$ con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$).

- De 5 cifras hay $9 \cdot 10 \cdot 10$ números capicúas (son de la forma $abcba$ con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c \leq 9$).

- De 6 cifras hay $9 \cdot 10 \cdot 10$ números capicúas (son de la forma $abccba$ con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c \leq 9$).

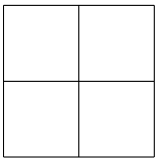
Así, hay $9 + 9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 10 = 1998$ números naturales capicúas menores que 10^6.
Aplicando ahora el principio del complementario, habrá $999.999 - 1.998 = 998.001$ números naturales menores que 10^6 que no son capicúas.

Ejercicio 4. ¿Cuántos enteros m del 1 al 1000 no son divisibles por 3?

Solución. Los enteros m entre 1 y 1000 divisibles por 3 son de la forma $3k$ con $1 \leq k \leq 333$.
Así, hay 333 enteros del 1 al 1000 divisibles por 3.
Aplicando ahora el principio del complementario, habrá $1000 - 333 = 667$ enteros del 1 al 1000 no divisibles por 3.

Ejercicio 5. Demuestra que si se eligen 5 puntos cualesquiera en un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\sqrt{2}$.

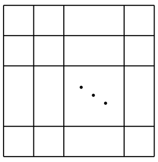
Solución. Dividimos el cuadrado como en la figura:



Por el principio de las cajas, si consideramos como objetos los 5 puntos y como cajas la subdivisión del cuadrado en 4 partes, como hay más objetos que cajas, existirán dos objetos en una misma caja, es decir, existirán dos puntos en una de esas 4 regiones. Entonces, su distancia será menor que la diagonal de la región cuadrada en la que están, que mide $\sqrt{2}$.

Ejercicio 6. ¿Cuántos puntos han de elegirse en un cuadrado de lado 2 para asegurar que al menos 2 de ellos estarán a una distancia no superior a $\sqrt{2}/n$?

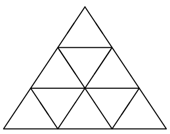
Solución. Dividimos el cuadrado como en la figura, en n^2 regiones:



Por el principio de las cajas, como hay n^2 regiones, si consideramos n^2+1 puntos existirán dos puntos en una de esas n^2 regiones. Entonces, su distancia será menor que la diagonal de la región cuadrada en la que están, que mide $\frac{\sqrt{2}}{n}$.

Ejercicio 7. Demuestra que si se eligen 10 puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $1/3$.

Solución. Dividimos el triángulo como en la figura, en 9 regiones:



Por el principio de las cajas, como hay 9 regiones, si consideramos 10 puntos existirán dos puntos en una de esas 9 regiones. Entonces, su distancia será menor que el lado de la región triangular en la que están, que mide $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 8. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Se supone que sólo hay puntuaciones enteras).

Solución. Como hay 11 notas posibles, si hubiera 56 alumnos estaríamos seguros de que existen al menos $\lceil \frac{56}{5} \rceil = 6$ estudiantes con la misma nota.
Por otra parte, si hubiera 55 alumnos es posible que 5 hayan sacado un 0, 5 hayan sacado un 1, 5 hayan sacado un 2, ..., 5 hayan sacado un 10.
Luego el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota es 56.

Ejercicio 9. Calcula el número de divisores de 112.000. ¿Cuántos son impares?

Solución. Como $112.000 = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 7$, se tiene que los divisores de 112.000 son los números de la forma $2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ con $0 \le a \le 7$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 1$.
Así, hay tantos divisores de 112.000 como ternas (a, b, c), con $0 \le a \le 7$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 1$, esto es, $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$.
Por otra parte, los divisores impares de 112.000 son de la forma $2^0 \cdot 5^b \cdot 7^c = 5^b \cdot 7^c$ con $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 1$, y por tanto hay tantos como pares (b, c), con $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 1$, esto es, $4 \cdot 2 = 8$.

Ejercicio 10. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número $29338848000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?

Solución. Como $29338848000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$, se tiene que los divisores de 29338848000 son los números de la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$ con $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 3$, $0 \le d \le 3$, $0 \le e \le 1$. Por tanto, hay tantos divisores de 29338848000 como quintuplas (a, b, c, d, e), con $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 3$, $0 \le d \le 3$, $0 \le e \le 1$, esto es, $9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$.
Por otra parte, los divisores múltiplos de 99 son de la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^1$ con $0 \le a \le 8$, $2 \le b \le 5$, $0 \le c \le 3$, $0 \le d \le 3$, $0 \le e \le 1$, y por tanto hay $9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.
Finalmente, como $39 = 3 \cdot 13$, 39 no es divisor de 29338848000. Por tanto, ningún divisor de 29338848000 puede ser múltiplos de 39.

Ejercicio 11. ¿Cuántos números de tres cifras distintas tienen todas ellas impares? ¿y pares?

Solución. Los números de 3 cifras son de la forma abc con $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$.
Si todas las cifras son impares y distintas, hay $5 \cdot 4 \cdot 3$ posibilidades.
Si todas las cifras son pares y distintas, hay $4 \cdot 4 \cdot 3$ posibilidades.

Ejercicio 12. Se extraen, con reemplazamiento y ordenadamente, cinco cartas de una baraja. ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey? ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey o un as?

Solución. El número de extracciones ordenadas de 5 cartas con reemplazamiento es 40^5.
Si ninguna de ellas es un rey, el número de extracciones posibles es 36^5. Por tanto, el número de extracciones en las que hay al menos un rey es $40^5 - 36^5$.
Por otra parte, el número de extracciones ordenadas de 5 cartas con reemplazamiento en las que no hay ni reyes ni ases es 32^5. Por tanto, el número de extracciones en las que hay al menos un rey o un as es $40^5 - 32^5$.

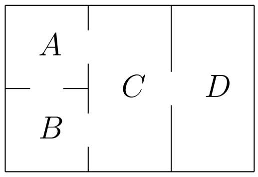
Ejercicio 13. Demuestra que en un conjunto de 12 enteros existen dos cuya diferencia es divisible por 11. ¿Es cierto si cambiamos diferencia por suma?

Solución. Consideramos las clases en módulo 11: $\{[0]_{11}, [1]_{11}, [2]_{11}, \ldots [10]_{11}\}$.
Como hay 11 clases, si tenemos 12 números enteros, por el principio de las cajas, habrá dos de ellos en la misma clase, y por tanto su diferencia será múltiplo de 11.
Por otra parte, si cogemos 12 números en la misma clase, que no sea la del 0, por ejemplo, $1, 1+11, 1+22, 1+33, \ldots 1+99, 1+110, 1+121$, que están todos en la clase $[1]_{11}$, la suma de dos cualesquiera de ellos estará en la clase $[2]_{11}$ y por tanto la suma de dos cualesquiera de ellos no es múltiplo de 11.

Ejercicio 14. Se eligen $n+1$ enteros positivos en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$. Demuestra que existen dos cuya diferencia es menor o igual que 2.

Solución. Consideramos los siguientes subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}, \ldots \{3n-2, 3n-1, 3n\}$. Como hay n subconjuntos, si elegimos $n+1$ números en $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$, habrá dos de ellos en un mismo subconjunto y por tanto su diferencia es a lo sumo 2.

Ejercicio 15. Se han de pintar las habitaciones de la casa que se muestra en la figura, de forma que las habitaciones que están conectadas por una puerta tengan colores distintos.
¿De cuántas maneras puede pintarse si se dispone de n colores?



Solución. Si pintamos primero la habitación A, tenemos n colores disponibles. Para B tendremos $n-1$ (cualquiera menos el utilizado para A). Para C tendremos $n-2$ (cualquiera menos los utilizados para A y B). Finalmente, para D tendremos $n-1$ (cualquiera menos el utilizado para C).
Por tanto, el número de maneras en que puede pintarse la casa es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-1)$.

Variaciones, permutaciones y combinaciones

Ejercicio 1. Lanzando un dado 5 veces ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse, si se tiene en cuenta el orden de lanzamiento?

Solución. Son las variaciones (porque se tiene en cuenta el orden) con repetición (porque puede salir el mismo resultado en diferentes tiradas) de 6 elementos (los 6 resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar un dado) de 5 en 5 (el número de veces que se tira el dado).
Así, el número de resultados diferentes que pueden obtenerse es $VR(6,5) = 6^5$.

Ejercicio 2. Lanzando 5 dados indistinguibles entre sí ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?

Solución. Son las combinaciones (porque los dados son indistinguibles y los lanzamos a la vez) con repetición (porque puede salir el mismo resultado en diferentes tiradas) de 6 elementos (los 6 resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar un dado) de 5 en 5 (el número de veces que se tira el dado).
Así, el número de resultados diferentes que pueden obtenerse es $CR(6,5) = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5}$.

Ejercicio 3. Dadas 5 vocales y 4 consonantes, ¿cuántas palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas se pueden formar teniendo en cuenta que en cada palabra no figuran dos consonantes seguidas?

Solución. Si denotamos por V a vocal y C a consonante, hay 3 ordenaciones posibles de las vocales y consonantes en la palabra: $CVCV, CVVC, VCVC$.
En cada uno de los 3 casos, el número de palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas es $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$ (5 posibilidades para la primera vocal, 4 posibilidades para la segunda vocal, 4 posibilidades para la primera consonante y 3 posibilidades para la segunda consonante).
Así, el número de palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas en las que no figuran dos consonantes seguidas es $3 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3)$.

Ejercicio 4. ¿Cuántas sucesiones de ceros y unos, de longitud n, contienen exactamente tres veces el 0?

Solución. Primero escogemos los 3 lugares de entre los n posibles que contendrán los tres ceros (esto se puede hacer de $C_{n,3} = \binom{n}{3}$ formas distintas).
Como en el resto de posiciones han de ir forzosamente unos, la solución será $C_{n,3} = \binom{n}{3}$.

Ejercicio 5. Se tienen siete libros azules, cinco negros y tres blancos, distintos entre sí. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo color?

Solución. Escogemos primero el orden de los colores (como hay 3 colores distintos, son las permutaciones de 3, es decir, se puede hacer de $P_3 = 3!$ formas distintas).
Luego escogemos el orden en que colocaremos los libros azules (como hay 7, esto se puede hacer de $P_7 = 7!$ formas distintas), los libros negros (como hay 5, esto se puede hacer de $P_5 = 5!$ formas distintas) y los libros blancos (como hay 3, esto se puede hacer de $P_3 = 3!$ formas distintas).
Así, la solución será $3! \cdot (7! \cdot 5! \cdot 3!)$.

Ejercicio 6. Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones $\{1, 0\}$:

a) ¿cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores?

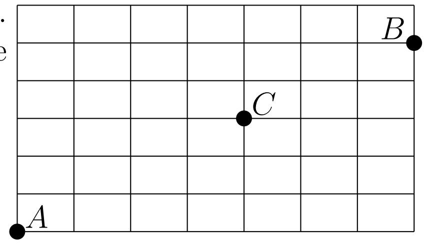
b) ¿cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?

Solución. a) Son las variaciones (porque los interruptores son distintos) con repetición (porque dos interruptores pueden estar en el mismo estado) de 2 elementos (los 2 estados posibles para cada interruptor) de 10 en 10. Así, el número de resultados diferentes que pueden obtenerse es $VR(2, 10) = 2^{10}$.
b) El número de estados con tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0 es $C_{10,3} = \binom{10}{3}$ (pues basta escoger los 3 interruptores que estarán en posición 1 (el resto de interruptores estarán forzosamente en posición 0).

Ejercicio 7. ¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución. Son las permutaciones con repetición de $BBBBBRRRNN$, es decir, $PR_{10}^{5+3+2} = \dfrac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$.
También se podría hacer escogiendo primero las 5 urnas en las que irán bolas blancas (esto se puede hacer de $C_{10,5} = \binom{10}{5}$ formas), escogiendo luego las 3 urnas en las que irán bolas rojas (esto se puede hacer de $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ formas, pues después de colocar las bolas blancas solo quedan 5 urnas libres), y colocando después las 2 bolas negras en las 2 urnas que quedan libres. De esta forma, el resultado sería $\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!}\dfrac{5!}{\cdot 3! \cdot 2!} = \dfrac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$.

Ejercicio 8. La cuadrícula de la figura representa calles de una ciudad. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas de viaje son hacia el este y hacia el norte,



a) ¿cuántos caminos distintos conducen de A hasta B?

b) ¿cuántos de ellos pasan por C?

Solución. Un camino posible equivale a una secuencia de Es y Ns donde N indica ir hacia el norte y E indica ir hacia el este.
a) Así el número de caminos de A a B coincide con el número de secuencias de Es y Ns en las que hay 7 Es y 5 Ns, que es $PR_{12}^{7+5} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!}$.
b) Como un camino de A a B que pasa por C es un camino de A a C seguido de un camino de C a B, el número de caminos de A a B que pasan por C es igual al número de caminos de A a C multiplicado por el número de caminos de C a B, esto es, $PR_7^{4+3} \cdot PR_5^{3+2} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$.

Ejercicio 9. Extrayendo 5 cartas de una baraja de 40 ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse:

a) con reemplazamiento,

b) sin reemplazamiento (el orden de aparición es irrelevante).

Solución. a) Como en esta caso se reemplazan las cartas, éstas han de extraerse secuencialmente, por lo que tendremos en cuenta el orden de extracción de las mismas.
Entonces son las variaciones (porque se tiene en cuenta el orden) con repetición (porque al reemplazarse las cartas una misma carta puede aparecer varias veces) de 40 elementos (las 40 cartas distintas de la baraja) de 5 en 5 (el número de cartas que se extraen).
Así, el número de resultados diferentes que pueden obtenerse es $VR(40, 5) = 40^5$.

b) Son las combinaciones (porque el orden de aparición es irrelevante) sin repetición (porque al no reemplazarse las cartas una misma carta no puede aparecer más de una vez) de 40 elementos (las 40 cartas distintas de la baraja) de 5 en 5 (el número de cartas que se extraen).
Así, el número de resultados diferentes que pueden obtenerse es $C_{40,5} = \dbinom{40}{5}$.

Ejercicio 10. Un banco tiene que elegir 5 cargos directivos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador, entre 8 personas, de las cuales 3 son hombres A, E, O y 5 mujeres X, Y, Z, V, W ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:

a) Los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección.

b) Se eligen los tres hombres.

c) Se eligen tres mujeres y dos hombres.

d) Se eligen tres mujeres al menos.

Solución. El número de elecciones posibles (sin restricciones) sería $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ (hay 8 candidatos para director, una vez elegido éste habrá 7 candidatos para subdirector, después habrá 6 para interventor, 5 para cajero y 4 para cobrador).
También se podría hacer escogiendo primero las 5 personas que recibirán cargo (esto se puede hacer de $\dbinom{8}{5}$ formas distintas) y repartiendo después los 5 cargos entre ellas (esto se puede hacer de $P_5 = 5!$ formas distintas). De esta forma la solución se expresaría como $\dbinom{8}{5} \cdot 5! = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 5! = \dfrac{8!}{3!}$.

a) El número de elecciones posibles en las que están A y E (ambos) sería $\binom{6}{3} \cdot 5!$ (escogemos primero las otras 3 personas que recibirán cargo y repartimos después los 5 cargos entre A, E y esas 3 personas). Entonces, por el principio del complementario, el número de elecciones posibles en las que no están juntos A y E sería $\binom{8}{5} \cdot 5! - \binom{6}{3} \cdot 5!$.

b) Escogemos primero las dos mujeres que recibirán cargo (esto se puede hacer de $\binom{5}{2}$ formas distintas) y repartimos después los 5 cargos entre los 3 hombres y las dos mujeres elegidas (esto se puede hacer de $P_5 = 5!$ formas distintas).
Así, la solución es $\binom{5}{2} \cdot 5!$.

c) Escogemos primero las tres mujeres que recibirán cargo junto con los 3 hombres (esto se puede hacer de $\binom{5}{3}$ formas distintas), escogemos después los dos hombres que recibirán cargo (esto se puede hacer de $\binom{3}{2}$ formas distintas) y repartimos después los 5 cargos entre las 3 mujeres y los dos hombres elegidos (esto se puede hacer de $P_5 = 5!$ formas distintas).
Así, la solución es $\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 5!$.

d) Esto se puede hacer de 3 maneras diferentes: se escogen exactamente 3 mujeres, se escogen exactamente 4 mujeres, o se escogen exactamente 5 mujeres.
En el primer caso, las tres mujeres se pueden escoger $\binom{5}{3}$ formas distintas y los dos hombres que también recibirán cargo de $\binom{3}{2}$ formas distintas, luego el número de soluciones es $\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 5!$.
En el segundo caso, las cuatro mujeres se pueden escoger $\binom{5}{4}$ formas distintas y el hombre que también recibirá cargo de 3 formas distintas, luego el número de soluciones es $\binom{5}{4} \cdot 3 \cdot 5!$.
En el terces caso, el número de soluciones es simplemente $5!$.
Así, la solución es $\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 5! + \binom{5}{4} \cdot 3 \cdot 5! + 5!$.

Ejercicio 11. El consejo de administración de una empresa está compuesto por 5 personas P1, P2, P3, P4, P5. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse pero sí puede votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos 3 votos favorables ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

Solución. Los posibles resultados distintos son las combinaciones con repetición de 3 resultados posibles (Si, No, Blanco) tomados de 5 en 5, es decir, $CR_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$.
Los posibles resultados distintos que implican la aprobación del proyecto son de tres tipos: con 5 votos favorables, con 4 votos favorables y con 5 votos favorables. Con 5 votos favorables solo hay un resultado posible, con 4 votos favorables hay dos resultados posibles ($SSSSN$ y $SSSSB$), y con 3 votos favorables hay 3 resultados posibles ($SSSNN$, $SSSNB$ y $SSSBB$). En total, el número de resultados distintos que implican la aprobación del proyecto es 6.

Ejercicio 12. Se tienen 5 sobres y 5 cartas y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que no haya ninguna coincidencia? ¿Y para que haya una coincidencia? ¿Y para que haya dos coincidencias? ... ¿Y para que haya cinco?

Solución. Las formas en que se pueden distribuir sin que haya ninguna coincidencia son los desórdenes de 5, $d_5 = 5! \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$.

Las formas en que se pueden distribuir de manera que haya exactamente una coincidencia son $5 \cdot d_4 = 5 \cdot 4! \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)$ (se puede escoger la carta que coincide con su sobre de 5 formas distintas, y se pueden distribuir las otras cuatro sin que ninguna carta coincida con su sobre de d_4 formas distintas).
Las formas en que se pueden distribuir de manera que haya exactamente dos coincidencias son $\binom{5}{2} \cdot d_3 = \binom{5}{2} \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right)$ (se pueden escoger las 2 cartas que coinciden con sus sobres de $\binom{5}{2}$ formas distintas, y se pueden distribuir las otras tres sin que ninguna carta coincida con su sobre de d_3 formas distintas).
Las formas en que se pueden distribuir de manera que haya exactamente tres coincidencias son $\binom{5}{3} \cdot d_2 = \binom{5}{3} \cdot 1 = \binom{5}{3}$ (se pueden escoger las 3 cartas que coinciden con sus sobres de $\binom{5}{3}$ formas distintas, y se pueden distribuir las otras dos sin que ninguna carta coincida con su sobre de $d_2 = 1$ formas distintas).
Es imposible distribuirlas de manera que haya exactamente cuatro coincidencias.
Se pueden distribuir de manera que haya exactamente cinco coincidencias de una única forma.

Ejercicio 13. En un tablero de ajedrez de 8 x 8 casillas, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de forma que ninguna esté en la diagonal ni se puedan comer entre ellas?

Solución. Son los desórdenes de 8 elementos: $d_8 = 8! \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right)$.

Ejercicio 14. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger cinco cartas de una baraja de 52 cartas de modo que se tenga al menos una carta de cada palo?

Solución. Habrá dos cartas de un palo y una de cada uno de los otros tres palos. El palo que se repite se puede escoger de 4 maneras distintas. Una vez escogido éste, las dos cartas de ese palo se pueden escoger de $\binom{13}{2}$ formas distintas. Las restantes 3 cartas (una de cada uno de los otros 3 palos) se pueden escoger de $13 \cdot 13 \cdot 13$ formas distintas.
Así, la solución es $4 \cdot \binom{13}{2} \cdot 13^3$.

Ejercicio 15. ¿Cuántas palabras de 13 letras pueden formarse con las letras de la palabra CLASIFICACIÓN?

Solución. Son permutaciones con repetición, $P_{13}^{3+3+2+1+1+1+1+1} = \frac{13!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$.

Ejercicio 16. Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Solución. Supondremos primero que las personas son indistinguibles, esto es, solo nos interesa cuántas personas se bajan en cada planta. En estas condiciones el número de maneras en que pueden bajarse los pasajeros coincide con el número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 5$ ($x_i \geq 0$ representa el número de pasajeros que se bajan en la planta i-ésima) que es $CR(7,5) = \binom{11}{5}$.

Por otra parte, si no hay dos pasajeros que se bajen en la misma planta, el número de formas es $C_{7,5} = \binom{11}{5}$ (hay que elegir las 5 plantas en que se bajará algún pasajero).
Supongamos ahora que las personas son distinguibles, esto es, nos interesa qué personas se bajan en cada planta. En estas condiciones el número de maneras en que pueden bajarse los pasajeros es 7^5 (cada pasajero tiene 7 posibilidades para elegir la planta en qué bajarse).
Por otra parte, si no hay dos pasajeros que se bajen en la misma planta, el número de formas es $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ (el pasajero A tiene 7 plantas para bajarse, el B 6, el C 5, y así sucesivamente).

Ejercicio 17. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas ellas de distintos colores?

Solución. El número de maneras de distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños coincide con el número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$ ($x_i \geq 0$ representa el número de canicas que se le dan al niño i-ésimo), que es $CR(6, 10) = \binom{15}{10}$.
Si las canicas son todas ellas de distintos colores, el número de maneras de distribuirlas es 6^{10} (cada canica se puede repartir a cualquiera de los 6 niños).

Ejercicio 18. Determina el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ donde:

a) $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$	b) $x_i > 0, 1 \leq i \leq 4$	c) $x_1, x_2 \geq 5$, $x_3, x_4 \geq 7$
d) $x_i \geq 8, 1 \leq i \leq 4$	e) $x_i \geq -2, 1 \leq i \leq 4$	f) $x_1, x_2, x_3 > 0$, $0 < x_4 \leq 25$.

Solución. a) $CR_{4,32} = \binom{35}{32}$,
b) $CR_{4,28} = \binom{31}{28}$,
c) $CR_{4,8} = \binom{11}{8}$,
d) 1,
e) $CR_{4,40} = \binom{43}{40}$,
f) $CR_{4,28} - CR_{4,3} = \binom{31}{28} - \binom{6}{3}$ (soluciones con $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ menos soluciones con $x_1, x_2, x_3 > 0, x_4 > 25$).

Ejercicio 19. ¿Cuántos números hay en el conjunto {1, 2, ..., 1000} tales que la suma de sus dígitos sea 5?

Solución. Son las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ ($x_i \geq 0$), que es $CR(3, 5) = \binom{7}{5} = 21$.
Podemos enumerarlos todos: 5, 14, 23, 32, 41, 50, 104, 113, 122, 131, 140, 203, 212, 221, 230, 302, 311, 320, 401, 410, 500.

Ejercicio 20. a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus digitos es 9?

b) ¿Cuántos números enteros de los hallados en a) tienen todos sus dígitos distintos de cero?

Solución. a) Son las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ ($x_1 \geq 1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$), que es $CR(4, 8) = \binom{11}{8}$.
b) Son las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$), que es $CR(4, 5) = \binom{8}{5}$.

Ejercicio 21. Se considera el código, sobre el alfabeto $B = \{0, 1\}$, formado por las palabras de 16 dígitos en las que el número de unos es múltiplo de 4. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?

Solución. Hay 5 casos distintos: palabras con 16 unos, palabras con 12 unos, palabras con 8 unos, palabras con 4 unos,palabras con 0 unos, donde:

- hay una sola palabra con 16 unos,
- hay $\binom{16}{12}$ palabras con 12 unos (basta escoger los lugares de los 12 unos),
- hay $\binom{16}{8}$ palabras con 8 unos (basta escoger los lugares de los 8 unos),

- hay $\binom{16}{4}$ palabras con 4 unos (basta escoger los lugares de los 4 unos),
- hay una sola palabra con o unos.

Así, la solución es $1 + \binom{16}{12} + \binom{16}{8}\binom{16}{4} + 1$.

Ejercicio 22. Dados n puntos sobre una circunferencia, se trazan todos los segmentos que determinan entre sí. ¿Cuantos hay? Suponiendo que no hay tres segmentos con un punto en común, ¿cuál es el número de puntos de intersección en el interior de la circunferencia?

Solución. Cada segmento viene determinado por sus dos extremos. Por tanto, hay $\binom{n}{2}$ segmentos (tantos como pares no ordenados de puntos).
Cada conjunto de cuatro puntos determina un cuadrilátero cuyas diagonales corresponden con dos segmentos que se cortan en un punto y, recíprocamente, cada punto de intersección corresponde unívocamente a dos diagonales de un cuadrilátero formado por 4 puntos. Así, hay $\binom{n}{4}$ puntos de intersección (tantos como cuaternas no ordenadas de puntos).

Ejercicio 23. El número de manos de 5 cartas de una baraja de 52 cartas que contienen al menos tres picas, no es $C_{13,3} \times C_{49,2}$. ¿Cuál es la respuesta correcta?

Solución. Hay 3 casos posibles: manos con 5 picas, con 4 picas o con 3 picas, donde:

- el número de manos con 5 picas es $\binom{13}{5}$ (maneras de escoger las 5 picas),
- el número de manos con 4 picas es $\binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1}$ (maneras de escoger 4 picas y 1 no pica),
- el número de manos con 5 picas es $\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}$ (maneras de escoger 3 picas y 2 no picas).

Así, la solución es $\binom{13}{5} + \binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1} + \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}$.

Ejercicio 24. ¿Cuál es el número de cuaternas (a, b, c, d) de números enteros que satisfacen $0 < a < b < c < d < 20$?

Solución. Son las combinaciones de $\{1, 2, 3, \ldots, 19\}$ tomados de 4 en 4, esto es, $C_{19,4} = \binom{19}{4}$.

Ejercicio 25. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 parejas entre 30 personas?

Solución. La primera pareja se puede elegir de $\binom{30}{2}$ formas distintas, la segunda pareja se puede elegir de $\binom{28}{2}$ formas distintas, la tercera pareja se puede elegir de $\binom{26}{2}$ formas distintas y la cuarta pareja se puede elegir de $\binom{24}{2}$ formas distintas.
Así, 4 parejas se pueden elegir ordenadamente de $\binom{30}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdot \binom{26}{2} \cdot \binom{24}{2}$ formas distintas.
Ahora, escoger primero la pareja (a, b) y luego la (c, d) da el mismo resultado que elegir primero la (c, d) y luego la (a, b). Por tanto hay que dividir el resultado anterior por las maneras de variar el orden en que se eligen las 4 parejas.

Así, la solución es $\dfrac{\binom{30}{2} \cdot \binom{28}{2} \cdot \binom{26}{2} \cdot \binom{24}{2}}{4!}$.

Ejercicio 26. Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 A, 5 B y 8 C. ¿Y si no puede haber dos B consecutivas? ¿Y si no hay dos letras iguales consecutivas?

Solución. El número de sucesiones que se pueden formar con 3 A, 5 B y 8 C son $P_{16}^{3+5+8} = \dfrac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 8!}$.
Si no puede haber dos B consecutivas, ordenamos primero las 3 As y las 8 Cs (esto se puede hacer de $P_{11}^{3+8} = \dfrac{11!}{3! \cdot 8!}$) y después colocamos las 5 Bs en 5 de los 12 huecos, incluidos el principio y el final de la palabra, que quedan (esto se puede hacer de $\binom{12}{5}$ formas distintas.
Así, la solución es $\dfrac{11!}{3! \cdot 8!} \cdot \binom{12}{5}$.
Finalmente, si no puede haber dos letras iguales consecutivas, entre cada dos Cs debe haber alguna otra letra. Como hay 8 Cs hay que poner alguna letra en cada uno de los 7 huecos entre ellas. Como hay otras 8 letras, hay 3 casos distintos:

- la palabra es de la forma $C(A \text{ o } B)C(A \text{ o } B)C(A \text{ o } B)C(A \text{ o } B)$,
- la palabra es de la forma $(A \text{ o } B)C(A \text{ o } B)C(A \text{ o } B)C(A \text{ o } B)C$,
- la palabra empieza y termina por C en cuyo caso hay un hueco entre 2 Cs ocupado por dos letras y en el resto de huecos solo hay una.

En cada uno de los dos primeros casos hay $PR_8^{5+3} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!}$ posibilidades. En el tercer caso hay $7 \cdot 2 \cdot PR_6^{4+2}$ posibilidades (7 posibilidades para escoger el hueco con dos letras, 2 posibilidades AB o BA para ordenar las dos letras en ese hueco, y PR_6^{4+2} posibilidades para ordenar las otras 6 letras en los 6 huecos restantes.
Así, la solución es $2 \cdot \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} + 7 \cdot 2 \cdot \dfrac{6!}{4! \cdot 2!}$.

Ejercicio 27. ¿Cuántas sucesiones de 10 símbolos pueden formarse con 4 A, 4 B, 4 C y 4 D si cada símbolo debe aparecer, al menos, dos veces?

Solución. Hay 3 casos distintos:

- hay 4 letras de un tipo y 2 letras de cada uno de los otros dos tipos,
- hay 3 letras de dos tipos y 2 letras de cada uno de los otros dos tipos.

En el primer caso hay $4 \cdot PR_{10}^{4+2+2+2}$ posibilidades (4 posibilidades para escoger la letra que aparece 4 veces y $PR_{10}^{4+2+2+2}$ posibilidades para ordenar las 10 letras.
En el segundo caso hay $\binom{4}{2} \cdot PR_{10}^{3+3+2+2}$ posibilidades ($\binom{4}{2}$ posibilidades para escoger la letras que aparecen 3 veces y $PR_{10}^{3+3+2+2}$ posibilidades para ordenar las 10 letras.
Así, la solución es $4 \cdot PR_{10}^{4+2+2+2} + \binom{4}{2} \cdot PR_{10}^{3+3+2+2}$.

Ejercicio 28. a) Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana, con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas?

b) Si se suprimen dos furgonetas, ¿cuántas caravanas diferentes se pueden formar con la condición anterior?

Solución. a) Hay 3 casos distintos:

- la caravana es de la forma $CFCFCFCFCFCF$ ($C =$coche, $F =$furgoneta)
- la caravana es de la forma $FCFCFCFCFCFC$ ($C =$coche, $F =$furgoneta)

- la caravana empieza y termina con furgoneta, en cuyo caso hay un hueco entre 2 furgonetas ocupado por dos coches y en el resto de huecos solo hay uno.

En cada uno de los dos primeros casos hay P_{12} posibilidades. En el tercer caso hay $5 \cdot P_{12}$ posibilidades (5 posibilidades para escoger el hueco con dos coches y P_{12} posibilidades para ordenar los vehículos de la caravana.
Así, la solución es $P_{12} + 5 \cdot P_{12} = 6 \cdot 12!$.
b) Si solo hay 6 coches y 4 furgonetas, para colocarlas de forma que no haya dos furgonetas juntas primero colocamos los coches (esto se puede hacer de $P_6 = 6!$ formas distintas) y después colocamos las 4 furgonetas en 4 de los 7 huecos que dejan los 6 coches, incluidos los huecos al principio y al final de la caravana (esto se puede hacer de $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ formas distintas).
Así, la solución es $6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Ejercicio 29. En un centro de ensenanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10.

a) ¿Cuántos expedientes académicos diferentes se pueden recibir?

b) ¿Cuántos de ellos tienen de nota media 7?

Solución. a) Son las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4, esto es, $VR_{6,4} = 6^4$.
b) Hay tantos como soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$, $5 \leq x_i \leq 10$. Sean:

- $A_0 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28, x_i \geq 5\}$,
- $A_1 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28, x_1 \geq 11, x_2, x_3, x_4 \geq 5\}$,
- $A_2 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28, x_2 \geq 11, x_1, x_3, x_4 \geq 5\}$,
- $A_3 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28, x_3 \geq 11, x_1, x_2, x_4 \geq 5\}$,
- $A_4 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28, x_4 \geq 11, x_1, x_2, x_3 \geq 5\}$,

Entonces las soluciones que cumplen $5 \leq x_i \leq 10$ son las que están en A_0 que no están en $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Por tanto, el número de soluciones será igual a la diferencia de cardinales $|A_0| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ donde,

- $|A_0| = CR_{4,8} = \binom{11}{8}$,
- $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^4 |A_i| - (\sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + (\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$, donde
  - $|A_i| = CR_{4,2} = \binom{5}{2}$,
  - $|A_i \cap A_j| = |A_i \cap A_j \cap A_k| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.

  Luego $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot \binom{5}{2}$.

Así, la solución es $\binom{11}{8} - 4 \cdot \binom{5}{2}$.

Ejercicio 30. a) En las aulas 1, 2, 3 y 4 de la Facultad de Informática, se van a examinar 192 alumnos de la asignatura Matemática Discreta. Suponiendo que no hay limitación en la capacidad de las aulas, ¿de cuántas formas se puede efectuar la distribución de los alumnos en las aulas?

b) Como la capacidad de las aulas sí es limitada, se introducen, entre todas las aulas, un total de 54 sillas auxiliares para la realización del examen. Si en cada aula no caben más de 20 sillas, ¿de cuántas formas se puede efectuar el reparto de sillas en las aulas?

Solución. a) Suponiendo los alumnos distinguibles, la solución sería 4^{192} (cada alumno puede ir a cualquiera de las 4 aulas).
Si suponemos los alumnos indistinguibles, esto es, si solo nos interesa cuantos se examinan en cada aula habrá tantas formas de repartirlos como soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 192$, $x_i \geq 0$, es decir, $CR_{4,192} = \binom{195}{192}$.
b) En este caso, las sillas son claramente indistinguibles, por lo que hay tantas formas de repartirlas como soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 54$, $0 \leq x_i \leq 20$. Para calcularlas definimos:

- $A_0 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 54, x_i \geq 0\}$,
- $A_1 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 54, x_1 \geq 21, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}$,
- $A_2 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 54, x_2 \geq 21, x_1, x_3, x_4 \geq 0\}$,
- $A_3 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 54, x_3 \geq 21, x_1, x_2, x_4 \geq 0\}$,
- $A_4 = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 54, x_4 \geq 21, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$,

Entonces las soluciones que cumplen $0 \leq x_i \leq 20$ son las que están en A_0 que no están en $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Por tanto, el número de soluciones será igual a la diferencia de cardinales $|A_0| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ donde,

- $|A_0| = CR_{4,54} = \binom{57}{54}$,
- $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - (\sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + (\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$, donde
  - $|A_i| = CR_{4,33} = \binom{36}{33}$,
  - $|A_i \cap A_j| = CR_{4,12} = \binom{15}{12}$.
  - $|A_i \cap A_j \cap A_k| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$.

  Luego $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot \binom{36}{33} - \binom{4}{2} \cdot \binom{15}{12}$.

Así, la solución es $\binom{57}{54} - 4 \cdot \binom{36}{33} + \binom{4}{2} \cdot \binom{15}{12}$.